**Путеводитель «Решение уравнений в целых числах»**

Писаренко Матвей

Андреев Аркадий

*Содержание*

* Предисловие
* Деление с остатком
* Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное
* Уравнения первой степени с двумя неизвестными
* Уравнения второй степени с двумя неизвестными
* Уравнения второй степени с тремя неизвестными
* Уравнения с двумя неизвестными степени выше второй
* Использованные источники

Уравнения в целых числах – тема непростая, обширная, однако её знание поможет при решении как школьных задач, так и олимпиадных.

Из школьной программы вы уже знаете, как решать самые простые уравнения в целых числах – уравнения первой и, возможно, второй степени с одним и с двумя неизвестными. В этом путеводителе вы узнаете, как решаются уравнения сложнее, но для начала стоит повторить две темы, которые пригодятся вам при разборе более сложных тем.

**Деление с остатком**

Пусть даны два целых числа m и n (n не равно 0). Мы говорим, что делим m на n с остатком, когда представляем m в виде m=n\*q+r, где q и r целые числа, причём r удовлетворяет неравенствам 0<r<n. Число q называется частным, а r остатком от деления m на n. Если r = 0, то получается, что деление было произведено без остатка.

**Примеры:**1) *35 = 8\*4+3*, то есть частное от деления *36* на *8* равно *4*, а остаток равен *3*;  
2) *-35=8\*(-5)+5*, остаток равен *5*;  
3) тот же остаток получится при делении *(-35)* на *(-8):*  
*-35=(-8)\*5+5*, остаток равен *5,* а не *(-3)*, как можно было предположить по аналогии с делением *35* на *8* (!)

*Е.В. Галкин «Нестандартные задачи по математике» стр. 84*

**Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное**

Наибольшим общим делителем двух или нескольких натуральных чисел называется наибольшее число, которое делится без остатка на каждое из данных чисел. Когда наибольший делитель двух чисел равен 1, то эти числа называются взаимно простыми.

Наименьшим общим кратным двух или нескольких натуральных чисел называется наименьшее число, которое делится на данные числа без остатка.

Находят наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное путем разложения данных чисел на множители.

**Пример:**

1. Найдите наибольший общий делитель чисел 111111 и 111111111.

Очевидно, что каждое из этих чисел делится на 111, то есть число 111 является их общим делителем. Но является ли 111 **наибольшим** общим делителем. Чтобы ответить на этот вопрос нам надо разделить данные числа на 111 и выясним являются ли полученные числа взаимно простыми.

111111=111\*1001, 111111111=111\*1001001

Разделим 1001001 на 1001 с остатком:

1001001=1001\*1000+1

Отсюда видно, что эти числа взаимно простые, если бы они имели наибольший общий делитель больше одного, то из последнего равенства следовало бы, что остаток, который равен 1, тоже делится на наибольший общий делитель, а это невозможно (меньшее натуральное число не может делиться на большее).

*Е.В. Галкин «Нестандартные задачи по математике» стр. 91*

**Уравнения первой степени с двумя неизвестными в целых числах**

Общий вид таких уравнений:

*ax+by=c,*

Где все переменные представляют целые числа.

Сперва рассмотрим наиболее простые уравнения такого типа на примере следующей задачи: имеются контейнеры двух видов: по 130 и по 160 кг. Сколько было контейнеров каждого вида, если вместе их вес составил 3 тонны? Укажите все решения этой задачи.

Обозначим количество контейнеров вместимостью 130 кг и 160 кг за *x* и *y* соответственно. Получим уравнение

*130x+160y=3000, 13x+16y=300*

Дальше воспользуемся делимостью на 13. Для этого разложим 16*y* на 13*y* + 3*у*, а 300 поделим на 13 с остатком. Получим

*13х+13у+3у=13\*23+1, 13\*23-13х-3у=3у-1*

Левая часть уравнения делится на 13, значит, и правая тоже должна делиться на 13. Чтобы найти такие *y*, при которых разность 3*у*-1 будет делиться на 13, применим способ подбора. Для наиболее быстрого нахождения такого у стоит подбирать такие значения этой переменной, чтобы 3*у*-1 было равно числам, делящимся на 13. При этом нужно проверять, является ли корень уравнения целым или дробным. Целые корни получатся в тех случаях, если *у*=9 или 22. Но *у*=22 не подходит нам, т.к.

*16у=16\*22=352>300*

При *у*=9 из уравнения можно найти *х*:

*13х+16\*9=300, 13х=156, х=12*

Ответ: 12 контейнеров по 130 кг и 9 контейнеров по 160 кг.

Далее перейдём к более сложным примерам, для решения которых использовать метод подбора нерационально из-за того, что коэффициенты могут быть большими, и использованный ранее метод осложняется. Как правило, при решении такого уравнения, оказывается, что оно имеет бесконечное множество решений, чем перебор мало помогает.

Рассмотрим этот способ решения на примере уравнения

*5х-7у=3*

Сперва выразим переменную, коэффициент которой меньше по модулю (в данном случае *х*). Получим

*5х=7у+3, .*

В числителе полученной дроби 7*у* разложим на два слагаемых так, чтобы одно из них делилось на 5, а коэффициент другого был меньше 5: 7*у*=5*у*+2*у.*

После этого разделим числитель дроби на знаменатель по членам:

*=у+.*

Дробь должна быть равна целому числу. Допустим, что

*=z,*

Где *z* – целое число. Тогда

*2у+3=5z.*

Получилось новое уравнение первой степени с двумя неизвестными, но с меньшими по модулю коэффициентами.

Из последнего уравнения выразим то неизвестное, коэффициент которого меньше по модулю, т.е. *у*, и проделаем схожие преобразования:

*2у=5z-3, у===3z-.*

Подобную процедуру следует продолжать до тех пор, пока не получится уравнение, у которого коэффициент при одном из неизвестных будет равен 1 или -1. Дробь должна быть целым числом. Обозначим его за *t*:

*Y= 3z-=3(2t-3)-t=5t-9,*

*X=y+=y+z=(5t-9)+(2t-3)=7t-12*.

Мы получили формулы

*X=7t-12, y=5t-9.*

Здесь *t* – целое число. Но является ли эта переменная любым целым числом? Чтобы это узнать, подставим выражения для *x* и *у* в левую часть исходного уравнения:

*5x-7y=5(7t-12)-7(5t-9)=35t-60-35t+63=3*.

Следовательно, эти формулы, в которых *t* – любое целое число дают множество всех решений уравнения в целых числах.

Придавая *t*, к примеру, значения 0, 1 и 2, получаем частные решения уравнения: (-12;-9), (-5;-4); (2;1).

Ответ: *x*=7*t*-12, *y* =5*t*-9, где *t* – любое целое число.

***Найдите все решения уравнений:***

А) 7х+13у=113; Б) 19х+99у=1999

*Е.В. Галкин «Нестандартные задачи по математике» стр. 153*

**Уравнения второй степени с двумя неизвестными в целых числах**

Общий вид такого уравнения

*Ax2+bxy+cy2+dx+ey+f=0*

*A, b, c, d, e, f* – данные целые числа, а среди переменных *a, b* и *с* хотя бы одна отлична от нуля.

***Подтипы таких уравнений по количеству наличия членов с квадратами неизвестных переменных***

1. Не содержащие членов с квадратами неизвестных
2. Содержащие член с квадратом одного из неизвестных
3. Содержащие член с квадратами всех неизвестных
4. Рассмотрим первый из этих подтипов. В таких уравнениях будет лишь один член во второй степени – с произведением переменных x и y.

Решим следующую задачу: надо доказать, что произведение целых x и y равно их сумме только если каждая из этих переменных равна нулю или двойке, то есть

*xy=x+y*

***Первый способ***

1. Сперва выразим у через х:

*xу-у=х, у(х-1)=х, у=*

1. Выделим целую часть *у* получившейся дроби:

*У==(х-1)+=1+*

Из этого следует, что *х-1=1* или -1

Если *х*-1=1, то *х*=2 и *у*=1+, то есть тоже 2

Если же *х*-1=-1, то *х*=0, а *у*=1-=0

***Второй способ***

1. Представим наше выражение в следующем виде *ху-х-у=0*, тогда *х(у-1)-у=0*

После этого добавим единицу в левую и правую части уравнения, чтобы разложить левую часть на множители.

*х(у-1)-у+1=1, (у-1)(х-1)=1*

Произведение двух целых чисел равно единице лишь тогда, когда каждый из множителей равен единице. Составим две системы линейных уравнений.

Из первой системы следует, что х и у равны двум, а из второй – равны нулю.

Этими двумя способами решаются все уравнения такого подтипа.

1. Уравнения, содержащие член с квадратом одного из неизвестных решаются в точности тем же методом, что и уравнения предыдущего подтипа.
2. Уравнения, содержащие член с квадратами каждого неизвестного, решаются совершенно по-разному в зависимости от задачи. В одних из них необходимо пользоваться свойствами делимости чисел для составления системы уравнений, в других нужно переставлять члены уравнения, чтобы получить квадратное уравнение относительно какой-либо переменной.

***Решите в целых числах х и у уравнения:***

А) ху=-х-у; Б) х-у=.

*Е.В. Галкин «Нестандартные задачи по математике» стр. 161*

**Уравнения второй степени с тремя неизвестными в целых числах**

Рассмотрим такое уравнение:

*Х2+у2=е2*

Можно заметить, что с точки зрения геометрии это уравнение представляет собой формулу, заложенную в основу теоремы Пифагора – *c2=a2+b2*. Следовательно, решая уравнение, мы находим все такие прямоугольные треугольники, у которых и катеты, и гипотенуза выражаются целыми числами. Иными словами, *пифагоровы треугольники*.

Сперва добавим переменную *d*, которая будет обозначать НОД *х* и *у*, т.е. *х* и *у:d=(х,у)*. Тогда

*Х=х1d, y=y1d,*

Тогда изначальное уравнение примет следующий вид

*Х12d2+y12d2=z2*.

Из этого следует, что *z2* делится на *d2*. Значит, *z d:z=z1d*

Теперь исходное уравнение можно записать следующим образом:

*Х12d2+y12d2=z12d2*

Видим общий множитель – *d2*. Сократим полученное уравнение на этот самый множитель и получаем

*X12+y12=z12.*

Стоит обратить внимание, что мы пришли к исходному уравнению, однако теперь переменные х и у не имеют общих делителей кроме 1. Пусть *(х,у)=1*. В таком случае одна из переменных будет представлять собой нечетное число. Допустим, что этой переменной будет *х*. Далее переносим *у2* в правую часть исходного уравнения и получаем

*Х2=z2-y2; x2=(z+y)(z-y)*

Обозначим через d1 общий НОД z+y и z-y. Тогда

*Z+y=ad1, z-y=bd1,*

*A* и *b* взаимно просты. Представим x2=(z+y)(z-y) в другом виде и получим

*X2=abd12*

Эти числа не имеют общих делителей, значит равенство будет возможно только в том случае, если а и b – полные квадраты.

*A=u2, b=v2*

Однако тогда

*X2=u2v2d12*

*X=uvd1.*

Осталось найти *y* и *z* из предыдущих равенств. В результате сложения этих равенств получаем

*2z=ad1+bd1=u2d1+v2d1; z,*

А в результате вычитания второго выражения из первого получаем

*2y=ad1-bd1=u2d1-v2d1; yd1.*

Так как ранее решено было взять x за нечетную переменную, то *u*, *v* и *d1* тоже нечетны. Более того, *d1*=1, ведь иначе из равенств

*X=uvd1 и yd1*

Следовало бы, что *x* и *у* имеют общий делитель *d1*, который не равен 1, что противоречит нашему предположению. Числа *u* и *v* связаны со взаимно простыми числами *a* и *b* равенствами

*A=u2, b=v2*

И поэтому сами взаимно просты; *v<u*, т.к. *b<a* по ранее приведенным равенствам (*Z+y=ad1, z-y=bd1).*

Подставляем *d1*=1 в предыдущие уравнения, получаем

*X=uv, y=(u2-v2)/2, z=(u2+v2)/2,*

Дающие при нечетных взаимно простых u и v все тройки целых положительных чисел *x, y, z*, свободные от общих делителей и соответствующие исходному уравнению. Дальше с помощью подстановки *x, y* и *z* в исходное равенство можно проверить, что при любых u и v числа последнего уравнения удовлетворяют этому уравнению.

Для начальных значений *u* и *v* последней формулы приведём к следующим равенствам:

*32+42=52 (v=1, u=3),*

*52+122=132 (v=1, u=5),*

*152+82=172 (v=3, u=5).*

Как уже известно, формулы последнего уравнения дают только такие решения исходного уравнения, в которых *x, y* и *z* не имеют общих делителей. Все остальные решения такого уравнения – умножение решений из формулы последнего уравнения, на какой-то множитель *d*.

Тем же самым путём могут быть получены и все решения других уравнений того же типа.

*А.О. Гельфонд «Решение уравнений в целых числах» стр. 18*

**Уравнения с двумя неизвестными степени выше второй.**

Уравнения сдвумя неизвестными, степень которых выше, чем вторая, обычно имеют конечное число решений в целых числах *х* и *у*.

Рассмотрим уравнение:

(1)

Где n – целое число, больше двух, и все числа a0, a1, a2, …, an, c – целые числа.

Как доказал в начале XX века А. Туэ, такое уравнение имеет только конечное число решений в целых числах х и у, за исключением случаев, когда левая часть этого уравнения представляет собой степень однородного двучлена первой степени или трехчлена второй степени. В этом случае наше уравнение будет иметь одну из двух форм:

*(ax + by)n = c0 (ax2 + bxy + cy2)n = c0,*

И тем самым сводится к уравнениям первой или второй степени, т.к. для существования у него решений с0 должно быть n-й степенью целого числа.

Мы не можем здесь изложить метод А. Туэ ввиду его сложности, поэтому ограничимся некоторыми пояснительными замечаниями.

Рассмотрим уравнение (1).

Разделим обе части уравнения на yn. Тогда наше уравнение примет вид:



(2)

Затем заменим на *z* и получим:



Для простоты изложения предположим, что

1. *с*=0,
2. *а0,а1, …аn =/ 0*
3. корни этого уравнения не могут быть корнями уравнений с целыми коэффициентами низшей степени.

В высшей алгебре доказывается, что всякое уравнение имеет хотя бы один корень, следовательно, если учесть, что всякий многочлен делится нацело на *z-a* и если *a* – его корень, то многочлен можно представить в виде произведения:

(3)

Где *a1,a2, …, an* – все *n* корней данного многочлена. Тогда перепишем уравнение (2) в следующем виде:

(4)

Допустим, что существует бесчисленное множество решений *xk, yk*уравнения (4) в целых числах. Это значит, что существуют решения со сколь угодно большим абсолютным значением *yk* .

Если бы существовало бесчисленное количество пар *х* и *у* решений данного уравнений, в которых значения *у* были бы ограничены, а значения *х* – очень большими, то для таких значений *х* левая часть уравнения была бы сколь угодно велика, а правая оставалась бы ограниченной, что не возможно.

Пусть *yk* будет очень велико, тогда правая часть уравнения (4) будет мала, значит должна быть мала и левая часть. Но левая часть уравнения есть произведение n-го числа сомножителей *xk/yk* и *а0*, которое не целое и не меньше 1.

Значит малость левой части может обусловливаться только тем, что по абсолютной величине мала какая-то из разностей

*Xk/yk – am*.

Ясно, что эта разность может быть мала только в том случае, когда am действительно, другими словами не имеет место равенство *am=a+bi*, *b=/0*.

В противном случае модуль нашей разности не может быть сколь угодно мал, так как



Две разности, два множителя левой части уравнения (4) не могут быть одновременно малы по модулю, так как

(5)

в силу того, что среди чисел am нет одинаковых. Если одна разность меньше по модулю или абсолютной величине, чем ½(*am*-*as*), то другая в силу (5) должна быть больше, чем ½(*am*-*as*). Это есть следствие того, что абсолютная величина суммы не превосходит суммы абсолютных величин. Так как все числа am различны между собой, то наименьшая по абсолютной величине или модулю разность (*am-as*) будет больше 0.

Обозначим (*am-as*) как 2*d* и получим, что если *yk* очень большое, то

*(–am)<d,*

то

*(–as)>d, s=1, 2, …, n, s=/m.* (6)

Тогда, так как абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей, из уравнения (4) получим, что

(7)

Но если в этом равенстве каждую из разностей *(-as) s=/m*, заменить величиной *d*, а (*a0*) заменить единицей, меньше которой целое число (*а0*) быть не может, то левая часть уравнения (7) станет меньше правой и мы получим неравенство:

(8)

Или неравенство

(9)

,

Где *с1* не зависит от *xn b yn*. Чисел *am*не более *n*, а пар [*xk, yk*], для которых должно быть при каком-нибудь *m* справедливо неравенство (9), бесчисленное множество. Поэтому существует какое-то определенное m такое, что для соответствующего am неравенство (9) выполняется бесконечное множество раз. Другими словами, если уравнение (1) имеет бесконечное множество решений в целых числах, то алгебраическое уравнение (3) с целыми коэффициентами имеет такой корень *a*, для которого при сколь угодно больших *q* будет выполняться неравенство

*(α-) < (10),*



Где *a* – постоянное, не зависящее от p и q число,

*p* и *q* – целые числа,

*n* – степень уравнения, которому α удовлетворяет.

Если бы Альфа (α) было произвольным, то можно было бы выбрать его так, что существовало бы бесконечное множество решений неравенства (10) в целых числах *p* и *q*. Но в нашем случае α есть алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Такие числа называются алгебраическими и обладают определенными свойствами. Степенью алгебраического числа называется степень того алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, которому это число удовлетворяет.

А. Туэ доказал, что для алгебраического числа α степени n неравенство

 (11)

может иметь только конечное число решений в целых числах *p* и *q*. Но если *n>=3*, то правая часть неравенства (10) при достаточно большом *q* станет меньше правой части неравенства (11), так как *n>n/2+1*.

Поэтому если неравенство (11) может иметь только конечное число решений в целых числах *p* и *q*, то неравенство (10) и подавно имеет только конечное число решений.

Значит, уравнение (1) может иметь только конечное число решений в целых числах, когда все корни уравнения (3) не могут быть корнями уравнения с целыми коэффициентами степени, меньшей *n*.

При *n*=2 неравенство (10) действительно может иметь бесчисленное множество решений в целых числах *p* и *q* при некотором *a*.

Теорема А. Туэ в дальнейшем была значительно усилена. Но следует отметить, что она не дает возможности установить верхнюю границу для величины решений.

Однако этот метод дает возможность найти границу величины решений для числа решений уравнения (3), хотя и достаточно грубую.

Для отдельных классов уравнений типа (3) эта граница может быть значительно уточнена. Например, советский математик Б.Н. Делоне показал, что уравнение

*ах3 + у3 = 1*

при целом а может иметь не более одного решения в целых числах *х* и *у*, за исключением тривиального *х*=0, *у*=1.

Кроме того, он показал, что уравнение

*ax3+bx2y+cxy2+dy3=1*

Может иметь не более пяти решений в целых х и у при целых *a, b, c* и *d*.

Пусть *P*(*х,у*) произвольный многочлен с целыми коэффициентами



где *aks* – целые числа.

Мы будем говорить, что этот многочлен неприводим, если его нельзя представить в виде произведения двух других многочленов с целыми коэффициентами.

Особым и весьма сложным методом К. Зигель доказал, что уравнение

*Р(х,у) = 0*,

где *Р(х,у)* – неприводимый многочлен выше, чем второй степени относительно *х* и *у* ( т.е. в него входит многочлен вида *Aksxkys*, где *k+s>2*), может иметь бесконечное множество целых решений в целых х и у только тогда, когда существуют числа

*an, an-1, …, a0, a-1, …, a-n*

и

*bn, bn-1, …, b0, b-1, …, b-n*

такие, что при подстановке вместо х и у в наше уравнение



мы получим тождество

*Р(х,у) = 0*

Относительно *t*. Здесь *n* – некоторое целое число.

**Пример:** 3x + 4y = 5z

Так как первая часть при натуральных z даёт при делении на 4 остаток 1, то и левая часть должна давать такой же остаток при делении на 4, откуда следует, что x чётно. Пусть x = 2m, где m натуральное число. Аналогично рассмотрим остатки от деления на 3. Левая часть при всех натуральных x и y даёт остаток 1, а 5z даёт остаток один только при чётных z, откуда z = 2k, где k – натуральное число. Тогда исходное уравнение можно переписать в виде 32m + 22y = 52k , или 52k – 22y = 32m.

Раскладывая левую часть по формуле разности квадратов, получаем (5k – 2y)(5k + 2y) = 32m. Так как разложение правой части на простые множетели содержит только тройки, то каждая из скобок должна быть неотрицательной степенью тройки. Так как разность между скобками 2 \* 2y не делится на 3, то это возможно только в случае, когда 5k – 2y = 1, а 5k + 2y = 32m. Отсюда 5k = 2y + 1, а 5k + 2y = 2y + 1 + 2y = 32m, или 32m – 1 = 2y+1.

Ещё раз применяем формулу разности квадратов, получаем:

(3m – 1)(3m +1) = 2y+1.

Значит, оба сомножителя в левой части являются степенями двойки, отличающимся на 2. Следовательно, 2m – 1 = 2, а 3m + 1 = 4, откуда m = 1, а 2y+1 = 8, т.е. y = 2. Тогда x = 2 и 32 + 42 = 52 , откуда z = 2.

*А.О. Гельфонд «Решение уравнений в целых числах» стр. 45*

**Использованные источники**

Е.В. Галкин «Нестандартные задачи по математике»

А.О. Гельфонд «Решение уравнений в целых числах»